Matematická indukce

Ivana Stefanová

stefanova@gym-so.cz

Součástí středoškolského učiva matematiky je také seznámení se základními druhy důkazů matematických tvrzení, mimo jiných i s matematickou indukcí. Následující odstavce si kladou za cíl ukázat, že tato metoda je všestrannější, než se z běžného výkladu při hodinách může zdát.

Úvod

Pomocí metody matematické indukce se při výuce obyčejně dokazují některá tvrzení z teorie čísel, např. dělitelnost určitých čísel nebo jednoduché vztahy pro konečné číselné řady. Použitý postup bychom mohli stručně shrnout takto.

Matematická indukce Chceme dokázat tvrzení $T(n)$ pro všechna přirozená čísla n. Postupujeme ve dvou krocích:

- *Základní krok* Libovolným způsobem dokážeme tvrzení $T(1)$.
- *Indukční krok* Předpokládáme platnost tvrzení $T(k)$ pro libovolné přirozené k a na základě tohoto předpokladu ověříme platnost $T(k+1)$ pro jeho následníka, na konkrétním způsobu opět nezáleží.

Tvrzení T dle základního kroku platí pro $n = 1$. Podle indukčního kroku z toho vyplývá, že platí i pro jeho následníka, tj. pro $n = 2$. Znovu z indukčního kroku dovozujeme, že platí i pro následovníka 2, tedy pro $n = 3$. Přirozená čísla tvoří nekonečnou posloupnost, proto dalším opakovaným použitím indukčního kroku ověřujeme platnost pro $n = 4, 5, 6, ...$ a postupně tedy pro všechna přirozená čísla. $\square$

Závěrečná rekapitulace nezávisí na konkrétním tvrzení T ani na způsobu důkazu základního či indukčního kroku. Proto se v konkrétních případech často explicitně neuvádí. Přesto ale je nedílnou součástí celého postupu a je třeba mít ji stále na mysli!

Následující text sestává z důkazů několika tvrzení metodou matematické indukce, na kterých bychom chtěli prakticky ukázat její různé varianty i další možnosti použití. Jednotlivé příklady jsou podle potřeby doplněny vysvětlujícími komentáři.

Příklad 1

Na rozehřátí a pro případné připomenutí metody matematické indukce dokažme pro každé přirozené n tento vztah

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1.$$

Důkaz V základním kroku důkazu pomocí matematické indukce pro $n = 1$ máme

$$1.1! = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1,$$

takže pro $n = 1$ vztah platí. Nyní pro provedení indukčního kroku budeme upravovat levou stranu přepsanou pro $n = k+1$

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + k.k! + (k+1)(k+1)!.$$

Za prvních k sčítanců dosadíme na základě předpokladu platnosti pro k výraz $(k+1)! - 1$

$$(k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+2)(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1.$$

Poslední výraz je skutečně pravá strana dokazovaného vztahu pro $n = k+1$, čímž je indukční krok a tím i celý důkaz dokončen. $\square$

Tento důkaz je naprosto standardní a neměl by znamenat žádné překvapení. V některých jiných případech dokazované tvrzení platí pro všechna nezáporná celá čísla (pak základní krok provádíme pro $n = 0$), jindy až pro přirozená $n \geq n_0$ (např. pro nerovnost $2^n > n^2$ je $n_0 = 5$). Taková modifikace základního schematu však nepředstavuje žádný problém.

Příklad 2

Členy Fibonacciho posloupnosti F_n definujeme rekurentním vztahem $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$, za první dva členy považujeme $F_1 = 1$ a $F_2 = 1$. Prvních několik členů posloupnosti tedy je 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Pomocí matematické indukce dokážeme, že n-tý člen posloupnosti lze vyjádřit také přímo

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi},$$

přičemž hodnota $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ je často označována jako zlatý řez a $\psi = (1-\sqrt{5})/2$.

Důkaz V základním kroku nejprve ověříme platnost vztahu pro $n = 1$ a $n = 2$. První případ je velmi snadný, neboť čitatel i jmenovatel zlomku je stejný a tedy platí $F_1 = 1$. Není obtížné ověřit, že $\psi = 1 - \varphi = -\varphi^{-1}$ a jmenovatele můžeme vyjádřit $\varphi - \psi = \sqrt{5}$. Pro $n = 2$ máme

$$F_2 = \frac{\varphi^2 - (1-\varphi)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^2 - (1 - 2\varphi + \varphi^2)}{\sqrt{5}} = \frac{2\varphi - 1}{\sqrt{5}} = 1,$$

takže vztah také platí.

Indukční krok budeme provádět za předpokladu, že pro F_k a F_{k-1} vztah platí ($k \geq 2$). Pomocí rekurentního vzorce definujícího posloupnost pak budeme vyjadřovat F_{k+1}

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{k-1} - \psi^{k-1}}{\varphi - \psi} = \frac{(\varphi^k + \varphi^{k-1}) - (\psi^k + \psi^{k-1})}{\varphi - \psi}.$$

První závorku v čitateli upravíme pomocí výše uvedených vztahů pro φ a ψ

$$\varphi^k + \varphi^{k-1} = \varphi^k(1 + \varphi^{-1}) = \varphi^k\left(1 - (1 - \varphi)\right) = \varphi^k.\varphi = \varphi^{k+1}$$

a podobně naložíme i s druhou závorkou čitatele (platí totiž také $1 - \psi = -\psi^{-1}$)

$$\psi^k + \psi^{k-1} = \psi^k(1 + \psi^{-1}) = \psi^k\left(1 - (1 - \psi)\right) = \psi^k.\psi = \psi^{k+1}.$$

Po dosazení již máme

$$F_{k+1} = \frac{\varphi^{k+1} - \psi^{k+1}}{\varphi - \psi},$$

což je skutečně vyjádření členu Fibonacciho posloupnosti pro $n = k + 1$.

Podle základního kroku je vyjádření správné pro $n = 1$ a $n = 2$. Za těchto předpokladů ověříme pomocí indukčního kroku platnost pro $n = 3$. Indukční krok pro $n = 4$ můžeme provést za předpokladu, že je správné vyjádření pro F_3 a F_2. To ale splněno je, takže pro $n = 4$ vztah také platí. Následně při ověření tvrzení pro F_5 využijeme v indukčním kroku platnost pro F_4 a F_3, atd. Opakováním indukčního kroku postupně prokážeme platnost vztahu pro libovolné přirozené n. □

Podstatnou novinkou v tomto důkazu je skutečnost, že při provedení indukčního kroku musíme předpokládat platnost tvrzení pro dva předchůdce. Proto také základní krok musíme provést pro $n = 1$ i $n = 2$, jinak by první provedení indukčního kroku nebylo možné!

Význam Existence vztahu pro přímý výpočet hodnoty F_n je významná zvláště pro velká n, případně i pro studium asymptotického chování. V těchto případech by výpočet pomocí rekurentní formule mohl být značně zdlouhavý. Uvědomíme-li si navíc, že $|\psi| < 1$, pak je zřejmé, že pro velká n se ψ^n oproti φ^n stává zanedbatelné a platí

$$F_n \simeq \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

Po zaokrouhlení na nebližší celé číslo lze tento přibližný vztah použít pro všechna přirozená čísla n.

Příklad 3

Dokážeme, že pokud pro nějaké θ lze hodnotu $\cos\theta$ zapsat jako zlomek $\cos\theta = p/q$ pro nějaká celá čísla p a $q \neq 0$ (tj. jedná-li se o racionální číslo), pak hodnota $V(n) = q^n \cos n\theta$ je celé číslo pro každé přirozené n.

Důkaz Základní krok provedeme ověřením pro $n = 1$

$$V(1) = q\cos\theta = q\,\frac{p}{q} = p \in \mathbb{Z}$$

a s využitím $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ také pro $n = 2$

$$V(2) = q^2\cos 2\theta = q^2(2\cos^2\theta - 1) = q^2(2\,\frac{p^2}{q^2} - 1) = 2p^2 - q^2 \in \mathbb{Z}.$$

Indukční krok budeme provádět za předpokladu, že pro k i $k-1$ tvrzení platí ($k \geq 2$). Pro úpravu výrazu $q^{k+1}\cos(k+1)\theta$ použijeme součtový vzorec $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$. Z něj vyjádříme $\cos(\alpha+\beta)$ a dosadíme $\alpha = k\theta$ a $\beta = \theta$

$$\cos(k+1)\theta = 2\cos k\theta.\cos\theta - \cos(k-1)\theta.$$

Hodnota dokazovaného výrazu pro $k + 1$ je

$$V(k+1) = q^{k+1}\cos(k+1)\theta = 2\overbrace{q^k\cos k\theta}^{V(k)}.\overbrace{q\cos\theta}^{V(1)} - q^2\overbrace{q^{k-1}\cos(k-1)\theta}^{V(k-1)},$$

kde složenou závorkou jsou vyznačeny výrazy postupně pro argument $n = k$, 1 a $k-1$. Pro $n = 1$ tvrzení platí dle základního kroku a pro dva předchůdce dle předpokladu indukčního kroku. Všechny tyto části jsou celá čísla, tudíž i celý výraz je nějaké celé číslo.

V základním kroku jsme tvrzení dokázali pro $n = 1$ a 2. Pro $n = 3$, 4 a následující můžeme provádět indukční krok, protože pro dva předchůdce tvrzení již bylo ověřeno. □

Provedený důkaz je jen malou modifikací předchozího případu. Pro provedení indukčního kroku jsme kromě platnosti pro dva předchůdce vyžadovali i platnost tvrzení pro $n = 1$. V některých dalších případech může být k důkazu $T(k+1)$ pomocí indukčního kroku vyžadován předpoklad platnosti tvrzení $T(i)$ pro každé i splňující $1 \leq i \leq k$. Příkladem takového postupu je důkaz existence prvočíselného rozkladu[1] pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$.

Důsledek Hodnota $\cos 1^\circ$ je iracionální číslo.

Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že $\cos 1^\circ$ je racionální. Potom dle právě dokázané věty jsou racionální čísla také všechny hodnoty kosinu pro celočíselné násobky 1°, mimo jiné i pro 45°. Dobře však víme, že $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$, což je ve sporu s předpokladem číslo iracionální. Z toho vyplývá, že také $\cos 1^\circ$ musí být iracionální.

Příklad 4

Nyní zaměříme svoji pozornost na následující tvrzení. Pro libovolná přirozená čísla m a n, kde $1 \leq m \leq n$, platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < 1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}.$$

Důkaz budeme provádět indukcí podle m, přičemž n je libovolné, předem pevně zvolené. V základním kroku snadno ověříme platnost pro $m = 1$

$$1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Indukční krok budeme provádět za předpokladu platnosti tvrzení pro k a zároveň za podmínky $k < n$. Úpravou levé strany nerovnosti pro $m = k+1$ máme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right),$$

kde roznásobíme závorky a sloučíme členy se stejným jmenovatelem. Dostaneme

$$1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k(k+1)}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} - \frac{k+1}{n^2}.$$

První tři sčítance již mají požadovaný tvar pravé strany pro $m = k+1$, zbývá dokázat, že rozdíl posledních dvou zlomků je záporný a tak neohrozí dokazovanou nerovnost. Chceme tedy ukázat, že $k^2 < n(k+1)$. To ale nepochybně platí, protože díky podmínce indukčního kroku platí tento sled implikací $k < n \Rightarrow k^2 < kn \Rightarrow k^2 < (k+1)n$. Tím jsme prokázali

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} < 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2}.$$

[1] Jedná se vlastně o jednu část důkazu tzv. základní věty aritmetiky, který zájemci naleznou např. na `http://www.gym-so.cz/personal/stefanova/aritmetika`.

Shrňme nyní dosažené výsledky. Zvolili jsme pevné n a následně jsme dokázali tvrzení pro $m = 1$ pomocí základního kroku a pro všechna další $m \leq n$ na základě indukčního kroku. Zvolené n však bylo libovolné, proto tvrzení platí pro všechna přirozená m a n, která splňují $1 \leq m \leq n$. □

Tento příklad přinesl dvě záležitosti, které stojí za povšimnutí. První je způsob práce s dvěma proměnnými, které se v dokazované nerovnosti objevují. Druhá spočívá v tom, že opakování indukčního kroku je omezeno další podmínkou (v našem případě $k < n$), takže neprobíhá do nekonečna. Omezení není přitom skryto v tom, že by nás tvrzení pro další členy již nezajímalo, ale tato podmínka byla pro provedení důkazu nezbytná. Vidíme tedy, že důkaz nějakého tvrzení pomocí matematické indukce se může týkat také pouze omezeného počtu členů.

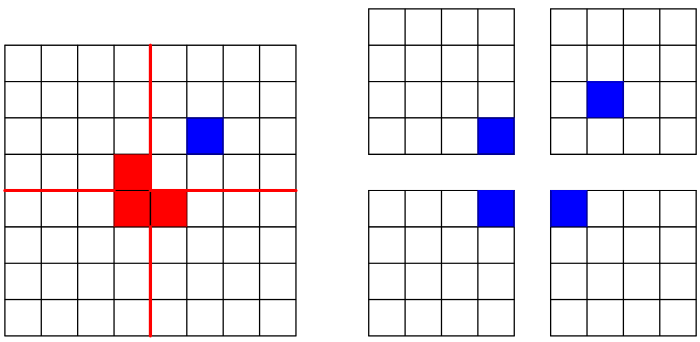
Příklad 5

Do zcela jiné oblasti matematiky míří následující tvrzení, byť i tentokrát budeme dokazovat matematickou indukcí. Představme si hrací desku (šachovnici) velikosti $n \times n$, kde n je nějaká mocnina 2, tj. $n = 2, 4, 8, \ldots$. Dále si představme hrací kameny, tzv. trimina, které vypadají jako tři sousední pole uspořádaná do L (viz obr. 1 níže). Dokážeme, že hrací desku lze beze zbytku pokrýt hracími kameny až na jedno libovolně předem vybrané pole.

Důkaz Základní krok pro šachovnici 2×2 provedeme snadno dle obr. 1. Vybereme libovolné pole (na obrázku modře), v každém případě to bude některý roh čtvercové hrací plochy. Její zbytek má tvar a velikost právě jednoho trimina, což znamená, že případ 2×2 je dokázán.

Obrázek 1: Tvar hracího kamene (vlevo) a řešení úlohy pro $n = 2$ (vpravo).

Indukční krok budeme provádět za předpokladu, že hrací desku $k \times k$ s výjimkou předem vybraného pole umíme pokrýt hracími kameny, a budeme se snažit o totéž pro desku $2k \times 2k$. Rozdělíme hrací desku vodorovným a svislým řezem na čtyři stejné části, každá z nich má rozměr $k \times k$. Vybrané pole leží právě v jedné z nich. Ve třech ostatních částech nalezneme pole, které leží nejblíže středu hrací desky před rozdělením a označíme je. Tato tři pole by před rozdělením pokryl právě jeden hrací kámen. Nejlépe to uvidíme na obr. 2, vlevo je hrací



Obrázek 2: Provedení indukčního kroku.

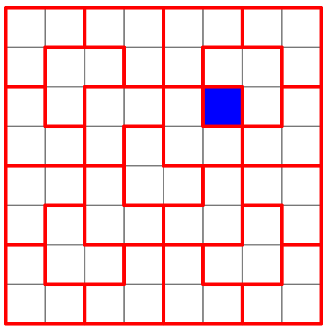
deska $2k \times 2k$ s modře vyznačeným vybraným polem, červeně označeným hracím kamenem dle předešlého popisu a červenými liniemi budoucího řezu. Ve stejném obrázku vpravo je situace po rozdělení na čtyři desky $k \times k$. Podle předpokladu indukčního kroku úlohu velikosti $k \times k$ umíme vyřešit pro libovolně vybrané pole, nevyjímaje speciální případ, kdy vybrané pole je jednou ze tří částí rozříznutého hracího kamene. Tím je indukční krok proveden a zároveň dokončen důkaz celého tvrzení. □

Tento příklad názorně demonstruje, že matematické důkazy nemusejí sestávat pouze z výpočtů, úprav výrazů a řešení rovnic či nerovnic. Může mít také názornou geometrickou podobu. Zároveň jsme viděli, že indukční krok nemusí znamenat pouze zvětšení nějakého indexu, může mít i podobu zdvojnásobení strany hrací desky.

Důsledek Povšimněte si, že jsme zároveň dokázali také (slabší) tvrzení, že číslo $2^{2n} - 1$ je pro všechna přirozená n dělitelné 3. Strana hrací desky je dle předpokladu tvrzení nějakou mocninou 2, lze ji tedy zapsat jako 2^n. Celá hrací deska má 2^{2n} polí, jedno vybrané z nich ale zůstane prázdné. Zbytek desky pokryjí hrací kameny, přičemž každý z nich zabírá 3 pole.

Algoritmus Jistě stojí za pozornost, že na základě postupu důkazu lze odvodit, jak pokrytí hracími kameny provést (samotný důkaz pouze tvrdí, že to je možné). Úlohou je tedy nalézt pokrytí hrací desky $n \times n$ kameny tak, aby zůstalo prázdné pouze jedno předem vybrané pole.

Algoritmus (postup řešení) získáme tak, že si celý průběh důkazu „přehrajeme" pozpátku. Metodou popsanou v indukčním kroku a vyobrazenou na obr. 2 rozdělíme desku na čtyři části, přičemž jedním hracím kamenem překryjeme rohové pole tří z nich (tím bylo zároveň v těchto čtvercích určeno pole, které nebude v následujících krocích pokryto), čtvrtá část obsahuje původní vybrané pole. Nyní provedeme stejnou proceduru s každou čtvrtinou a celý postup opakujeme, dokud dělením nedosáhneme velikosti 2×2. Tuto úlohu umíme řešit podle základního kroku důkazu vložením jednoho trimina. Postupně tak celou hrací plochu (až na vybrané pole) pokryjeme kameny, což vidíme na obr. 3. Pro menší rozměry hrací desky lze úlohu vyřešit



Obrázek 3: Celkové řešení úlohy

pomocí tužky a papíru, v ostatních případech je lepší algoritmus naprogramovat a přenechat dřinu počítači.

Matematická indukce má k počítačovým algoritmům obecně velmi blízko. Podobně jako v tomto příkladu důkaz často poskytne návod, jak úlohu rozdělit na menší části, které se zpracují snadněji. Vždyť také sám princip matematické indukce je ve své podstatě algoritmus, který nám říká, které kroky a za jakých podmínek máme provádět.

Příklad 6

Při výuce základů statistiky jsme se seznámili také s aritmetickým a geometrickým průměrem několika hodnot. Pro n kladných reálných hodnot a_i $(1 \leq i \leq n)$ definujeme aritmetický průměr

$$\mu_A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

a geometrický průměr

$$\mu_G = \sqrt[n]{a_1.a_2.\cdots.a_n}.$$

Pro libovolné přirozené $n \geq 2$ a libovolnou n-prvkovou množinu kladných reálných čísel platí $\mu_A \geq \mu_G$.

Důkaz V základním kroku pro $n = 2$ má tvrzení tvar

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1.a_2}.$$

Po umocnění obou stran (díky kladnosti obou stran se zachová i znaménko nerovnosti) máme

$$a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 4a_1a_2,$$

což dává

$$a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1 - a_2)^2 \geq 0.$$

Z tohoto vyjádření je platnost nerovnosti zřejmá.

Nyní indukcí dokážeme za předpokladu platnosti nerovnosti pro k její platnost pro $2k$. Budeme upravovat aritmetický průměr $2k$ hodnot

$$\mu_{A,2k} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k}}{2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{k}\right).$$

Každý zlomek v závorce je nějaké kladné reálné číslo, takže na pravou stranu můžeme pohlížet také jako na aritmetický průměr dvou hodnot, každá z nich je tvořena jedním zlomkem v závorce. Dle základního kroku použijeme nerovnost pro dvě hodnoty

$$\mu_{A,2k} \geq \sqrt{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \cdot \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{k}}.$$

Každý ze zlomků pod odmocninou představuje aritmetický průměr k hodnot, který dle předpokladu indukčního kroku můžeme zdola odhadnout pomocí geometrického průměru

$$\mu_{A,2k} \geq \sqrt{\sqrt[k]{a_1.a_2.\cdots.a_k}.\sqrt[k]{a_{k+1}.a_{k+2}.\cdots.a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1.a_2.\cdots.a_{2k}} = \mu_{G,2k}.$$

Opakováním indukčního kroku ověříme platnost tvrzení pro $n = 4, 8, 16, \ldots$ hodnot. Co ale s ostatními mezilehlými počty?

Použijeme, jak jinak, opět matematickou indukci! Pokusíme se z platnosti tvrzení pro dostatečně velké k dokázat tvrzení pro $k-1$, tj. pro jeho předchůdce. Jako vhodné k pro základní krok použijeme nějakou mocninu 2, pro níž jsme platnost již dokázali výše.

Indukční krok budeme provádět pro $k \geq 3$, z platnosti $\mu_{A,k} \geq \mu_{G,k}$ budeme chtít odvodit $\mu_{A,k-1} \geq \mu_{G,k-1}$. Tvrzení tedy dle předpokladu platí pro libovolných k kladných reálných čísel. Tedy i pro speciální případ, kdy vezmu libovolná taková čísla a_1, a_2, ..., a_{k-1} a poslední číslo jako jejich aritmetický průměr

$$a_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}.$$

Vyjádření pro $\mu_{A,k}$ lze upravit na tvar

$$\mu_{A,k} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + \dfrac{a_1 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}}{k} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} = a_k.$$

Díky platnosti nerovnosti $\mu_{A,k} \geq \mu_{G,k}$ máme

$$a_k \geq \sqrt[k]{a_1.a_2.\cdots.a_k}$$

a po vyjádření a_k

$$a_k^{k-1} \geq a_1.a_2.\cdots.a_{k-1}.$$

Na obou stranách nerovnice vyjádříme $(k-1)$-tou odmocninu (znovu připomínáme, že na obou stranách nerovnosti máme kladná čísla) a dosadíme za a_k

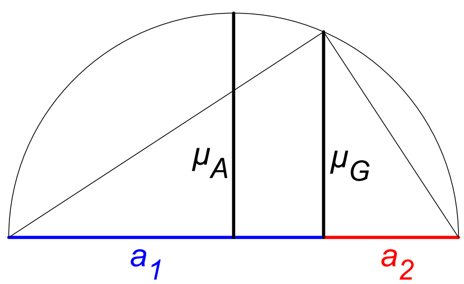
$$a_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{a_1.a_2.\cdots.a_{k-1}},$$

což je ale přesně požadovaná nerovnost $\mu_{A,k-1} \geq \mu_{G,k-1}$ pro libovolná kladná reálná čísla a_1 až a_{k-1}. Tím je dokázána i druhá indukce, samozřejmě indukční krok lze provádět pouze pro $k \geq 3$.

Chceme-li ověřit platnost pro nějaké určité n, které není mocninou 2, pak pomocí první indukce dokážeme platnost pro některé $m > n$ a následně se pomocí druhé indukce vrátíme zpět k n. Například pro $T(14)$ je postup: $T(2) \overset{1}{\Rightarrow} T(4) \overset{1}{\Rightarrow} T(8) \overset{1}{\Rightarrow} T(16) \overset{2}{\Rightarrow} T(15) \overset{2}{\Rightarrow} T(14)$. Tímto způsobem dokážeme platnost tvrzení pro libovolné $n \geq 2$. $\square$

Tento příklad byl trochu delší a náročnější, ale duše každého milovníka matematické indukce se musela přímo zatetelit blahem. V důkazu byla indukce použita hned dvakrát, pokaždé v jiném provedení. Jednou pro vzrůstající indexy s násobením délky kroku, podruhé pro indexy klesající s krokem konstantním, jednou neomezená, podruhé konečná. Zkrátka prakticky vše, co jsme si dosud předvedli, zde bylo použito naráz. Za tento krásný důkaz vděčíme francouzskému matematikovi A. L. Cauchymu.

Dodatek Důkaz nerovnosti pro dva členy má velmi názornou geometrickou interpretaci, viz obr. 4. Nad úsečkou délky $a_1 + a_2$ narýsujeme Thaletovu kružnici. Její poloměr je $(a_1 + a_2)/2$,



Obrázek 4: Aritmetický a geometrický průměr pro dva členy.

což se rovná právě μ_A. Pokud ve společném bodě obou částí úsečky vztyčíme kolmici, pak její průsečík s kružnicí a dva krajní body celkové úsečky vytvářejí pravoúhlý trojúhelník. V něm platí Eukleidova věta o výšce $a_1.a_2 = \mu_G^2$, takže tato výška má skutečně význam geometrického průměru $\mu_G = \sqrt{a_1.a_2}$. Nerovnost $\mu_A \geq \mu_G$ je evidentní, rovnost nastává právě při $a_1 = a_2$.

Příklad 7

V posledním příkladu dokážeme překvapivé tvrzení. Vybereme-li libovolnou n-prvkovou množinu reálných čísel ($n \neq 0$, tj. množina není prázdná), pak všechny její prvky jsou stejné.

Důkaz V základním kroku pro $n = 1$ je tvrzení triviálně splněno, neboť množina má pouze jeden prvek.

Indukční krok provedeme za předpokladu, že pro libovolnou k-prvkovou množinu je tvrzení splněno. Máme nyní množinu $k + 1$ libovolných reálných čísel $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Vytvoříme z ní dvě množiny o k prvcích následovně: $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ a $\{a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Podle předpokladu jsou všechny prvky první množiny stejné, to samé platí i pro druhou množinu. První množina však mimo jiné obsahuje i prvek a_2, který je zároveň prvkem druhé množiny. Všechny prvky obou množin jsou tedy stejné jako a_2, tudíž jsou stejné i všechny navzájem. Indukční krok a následně celý důkaz je tím dokončen. □

Na první pohled je zřejmé, že tady něco není v pořádku. Vybereme-li např. množinu čtyř reálných čísel $\left\{\sqrt{2}, 8, \pi, e^3\right\}$, tak její členy v rozporu s tvrzením stejné nejsou. To znamená, že důkaz musí obsahovat chybu. Už jste ji nalezli?

Problém tkví v indukčním kroku. Při přechodu od $k = 1$ k následníkovi vytvoříme dvouprvkovou množinu $\{a_1, a_2\}$, kterou dle pokynů rozdělíme na dvě $\{a_1\}$ a $\{a_2\}$. V tomto případě nemají množiny žádný společný prvek, na jehož základě bychom mohli provést srovnání. Pro $k \geq 2$ je provedení indukčního kroku již korektní, pro $k = 1$ však nikoliv. Tím je však celý důkaz neplatný.

Poučení Důkaz matematickou indukcí se skládá z několika částí. Pro platnost celého postupu jsou důležité všechny jeho části, žádnou nelze zanedbat ani podcenit. Platí to pro krok základní i pro krok indukční za všech přípustných okolností. Celý důkaz bychom mohli připodobnit ke stavbě cihlové zdi, kdy na betonové základy (základní krok) postupně přidáváme vrstvy cihel (opakování indukčního kroku). Pokud jsou špatné základy nebo některá vrstva cihel je nekvalitní, celá zeď se zboří.

Závěr

Společně jsme prošli řešením několika příkladů pomocí matematické indukce. V průběhu naší cesty jsme potkali tuto metodu v různých podobách, které se od popisu zveřejněného v úvodu v různé míře odlišují. Přirozeně se nabízí otázka, jak popis aktualizovat tak, aby zahrnul všechny studované případy. Odpověď by mohla znít kupříkladu následovně.

Matematická indukce Máme množinu A a pro všechny její prvky a_n chceme dokázat tvrzení T. Pokud se nám podaří seřadit všechny prvky množiny do posloupnosti $\{a_n\}$, můžeme provést důkaz pomocí matematické indukce. Postupujeme ve dvou krocích:

- *Základní krok* Libovolným způsobem dokážeme tvrzení $T(a_1)$.
- *Indukční krok* Pokud má prvek a_k v množině A následníka, pak za předpokladu platnosti tvrzení $T(a_i)$ pro všechna $1 \leq i \leq k$ ověříme platnost $T(a_{k+1})$ pro jeho následníka, na konkrétním způsobu opět nezáleží.

Tvrzení T dle základního kroku platí pro a_1. Podle indukčního kroku z toho vyplývá, že platí i pro jeho následníka, tj. pro a_2. Z platnosti $T(a_1)$ i $T(a_2)$ můžeme indukčním krokem dokázat platnost $T(a_3)$. Nyní již víme, že tvrzení platí pro a_1, a_2 a a_3, indukčním krokem dokážeme

$T(a_4)$. Opakováním indukčního kroku postupně ověříme platnost tvrzení pro všechny prvky množiny A. $\square$

Zásadní podmínkou pro použití matematické indukce na nějaké množině je možnost uspořádání jejich prvků do posloupnosti, tj. musí existovat první člen a také nějaká relace určující pořadí všech ostatních prvků[2]. Množina A přitom může být konečná i nekonečná.

Na úplný závěr lze sotva popřát něco jiného, než mnoho úspěchů při všech budoucích důkazech metodou matematické indukce.

Použitá literatura

Zdroje jsou uvedeny v abecedním pořadí dle jména autora nebo jména elektronického zdroje.

Erickson, Jeff: Proof by induction, elektronicky na `http://web.engr.illinois.edu/~jeffe/teaching/algorithms/notes/98-induction.pdf`

Nekvinda, Aleš: Matematická indukce, *materiály MO*, 2008

Wikipedia: internetová encyklopedie, elektronicky na `http://en.wikipedia.org` v angličtině, na `http://cs.wikipedia.org` v češtině

Sepsáno v Soběslavi v únoru 2015, poslední revize 19. února 2015.

[2] Matematici říkají, že na zadané množině existuje dobré uspořádání.