3 Odmocniny přirozených čísel

V předchozím díle našeho seriálu jsme si ukázali, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. Zdá se tedy, že odmocniny dalších přirozených čísel jsou vhodnými kandidáty na další iracionální čísla. Budeme se jim věnovat v následujícím textu, přičemž se neomezíme pouze na druhou odmocninu, ale uvážíme i odmocniny vyšších stupňů.

Předmětem našeho zkoumání tedy budou výrazy $\sqrt[n]{x}$, kde n i x jsou přirozená čísla ≥ 2. Důkaz sporem se nám minule osvědčil, zkusíme jej použít i tentokrát. Předpokládejme tedy, že můžeme položit

$$\sqrt[n]{x} = \frac{p}{q}$$

pro nějaká přirozená čísla p a q, přičemž zlomek p/q je v základním tvaru. Obě strany rovnice umocníme na n-tou

$$x = \frac{p^n}{q^n}$$

a vhodně vynásobíme

$$xq^{n-1} = \frac{p^n}{q}.$$

Z hodin matematiky víme, že každé přirozené číslo (větší než 1) lze jednoznačně rozložit na součin prvočíselných činitelů[1]. Nechť tedy takové rozklady jsou $p = p_1. \cdots .p_r$ a $q = q_1. \cdots .q_s$, přičemž některý faktor se v rozkladu může i vícenásobně opakovat. Je důležité si uvědomit, že žádný z faktorů q_i nemůže být shodný s žádným faktorem p_i. Pokud by taková shoda nastala, zlomek p/q by bylo možné krátit, což je v rozporu s tím, že je v základním tvaru. Není-li možné provést krácení ve zlomku p/q, nelze krátit ani p^n/q, neboť rozklad čitatele obsahuje stejné faktory p_i, pouze jejich násobnost se liší. Zaměříme nyní svou pozornost na poslední rovnici. Na levé straně vystupuje člen xq^{n-1}, což je jistě nějaké přirozené číslo. Aby byla splněna uvedená rovnost, musí i pravá strana p^n/q být číslo přirozené. Zlomek je v základním tvaru, takže tuto podmínku lze splnit pouze tehdy, je-li $q = 1$. Pro $q \neq 1$ rovnici nelze splnit, čímž jsme dosáhli sporu s výchozím předpokladem.

Shrňme nyní, co získané výsledky znamenají. Buď pro nějaké přirozené číslo p platí, že $x = p^n$, nebo je $\sqrt[n]{x}$ iracionální číslo. Jinak řečeno, většina odmocnin přirozených čísel jsou čísla iracionální. Platí to nejen pro druhé odmocniny, ale i pro odmocniny vyšších řádů. Výjimkou jsou taková čísla x, která jsou n-tou mocninou jiného přirozeného čísla.

Dosavadní výsledky mohou sloužit i pro důkaz iracionality dalších čísel, příkladem může být $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Pro důkaz sporem předpokládejme, že pro nějaká přirozená čísla p a q můžeme zapsat

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}.$$

Umocníme obě strany

$$2 + 2\sqrt{2}.\sqrt{3} + 3 = \frac{p^2}{q^2}$$

a postupně upravujeme

$$5 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2}$$

[1] Toto tvrzení se často nazývá *základní věta aritmetiky*, jeho kompletní důkaz jsme při výuce neprováděli. Postup důkazu zájemci naleznou např. na `http://www.gym-so.cz/personal/stefanova/aritmetika`.

$$\sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2}.$$

Výraz na pravé straně poslední rovnice je nepochybně racionální číslo, v předchozím jsme však dokázali, že $\sqrt{6}$ je iracionální. Tím jsme se dostali do sporu s počátečním předpokladem. Prokázali jsme tedy, že číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ je iracionální. Analogicky lze postupovat i pro součet či rozdíl odmocnin řady jiných čísel.

Zjistili jsme, že iracionalita čísla $\sqrt{2}$ není nijak výjimečná vlastnost, takových čísel dokážeme sestrojit velmi mnoho, dokonce libovolně mnoho. Jako několik příkladů mohou posloužit $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{15}$, $\sqrt[691]{34}$ nebo $\sqrt{17\,000\,000\,000}$. Vezmeme-li například prvočísla[2], pak všechny jejich druhé, třetí, čtvrté, ..., libovolné odmocniny jsou iracionální čísla[3].

[2]počet prvočísel je neomezený

[3]Prvočíslo lze rozložit pouze jako součin 1 a sebe samého, tudíž ho nikdy nelze vyjádřit ve tvaru p^n, pro $n \geq 2$.