4 Eulerovo číslo e

Číslo, které většinou nazýváme Eulerovo a označujeme e, si našlo cestu do matematiky až v 17. století. Od té doby se však pravidelně objevuje v jejích nejrůznějších odvětvích a představuje jednu z nejdůležitějších matematických konstant vůbec. O jeho výjimečnosti svědčí např. i to, že právě funkce $f(x) = e^x$ je (až na multiplikativní konstantu) jediná nekonstatní funkce, která při derivování přechází na sebe samu.

Číslo e je možné definovat několika alternativními způsoby, jeden z nich je pomocí někonečné řady

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}.$$

Všechny členy řady jsou kladné, posloupnost částečných součtů je tedy rostoucí. Tuto řadu lze zhora omezit pomocí geometrické řady (to se snadno ověří porovnáním odpovídajících členů)

$$e < 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2. \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i},$$

kterou snadno sečteme s výsledkem 4. Pokud je posloupnost částečných součtů rostoucí a zároveň omezená, znamená to, že řada konverguje a tudíž uvedená definice má dobrý smysl. Dolní odhad hodnoty e získáme z prvních dvou členů řady ($e > 1 + \frac{1}{1!} = 2$). Horní odhad pomocí geometrické řady ještě vylepšíme, pokud její první člen nahradíme 1. Pak všechny členy jsou větší než odpovídající členy řady pro e s výjimkou prvních tří, které jsou shodné. Z toho plyne, že $2 < e < 3$. Otázka, kterou si nyní klademe, zní, zda Eulerovo číslo je racionální či iracionální.

Iracionalitu e budeme dokazovat sporem, to se nám již opakovaně osvědčilo. Předpokládejme tedy, že e je racionální a tudíž jej můžeme zapsat jako zlomek p/q, ve kterém jsou čitatel i jmenovatel nějaká přirozená čísla ($q \neq 1$). V rovnici

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \cdots = \frac{p}{q}$$

vynásobíme obě strany $q!$ a dostaneme

$$q! \left\{ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!} \right\} + R_q = p(q-1)!,$$

přičemž jsme označili

$$R_q = q! \left\{ \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \cdots \right\}.$$

Člen $p(q-1)!$ na pravé straně rovnice je nepochybně nějaké přirozené číslo, rovněž tak i součin na levé straně rovnice[1]. Z uvedené rovnosti plyne, že i výraz R_q musí být přirozeným číslem (rozhodně je kladný, neboť je součtem kladných členů).

[1] Roznásobíme závorku a v každém sčítanci máme podíl faktoriálů, přičemž argument ve jmenovateli není nikdy větší. Zlomek můžeme krátit všemi faktory jmenovatele (rozhodně jsou obsaženy i v $q!$) a vyjde nám nějaké přirozené číslo. Konkrétně např. pro $q > 3$

$$\frac{q!}{3!} = \frac{q(q-1). \cdots .4.3.2.1}{3.2.1} = q(q-1). \cdots .4\,.$$

Budeme upravovat člen R_q

$$R_q = \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \cdots = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots$$

a zkusíme odhadnout jeho velikost

$$R_q < \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots.$$

Na pravé straně nerovnosti máme geometrickou řadu s prvním členem $1/(q+1)$ a kvocientem také $1/(q+1)$. Její součet snadno vypočteme, takže dostáváme horní odhad ve tvaru

$$R_q < \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{q+1}{q} = \frac{1}{q}.$$

Jmenovatel q v odhadu je nepochybně větší než 1. Již dříve jsme odvodili, že R_q je (kladné) přirozené číslo, z poslední nerovnosti však máme, že $R_q < 1/q < 1$. Zde jsme narazili na dva protichůdné požadavky, z čehož vyplývá, že Eulerovo číslo e není možné zapsat jako zlomek, jedná se tedy o číslo iracionální.