5 Logaritmy

Logaritmy byly objeveny na začátku 17. století a již záhy byl rozpoznán jejich ohromný význam pro usnadnění vědeckých a technických výpočtů. V tomto ohledu již logaritmy vyklidily pole ve prospěch kalkulaček a počítačů, ale přesto zůstaly velmi důležitou součástí dnešní matematiky.

Je až překvapivě snadné dokázat, že logaritmy přirozených čísel se základem, který je rovněž přirozený (≥ 2), jsou „většinou“ iracionální čísla (konkrétní význam slova „většinou“ vyplyne z důkazu tvrzení níže v textu).

Nejprve se budeme zabývat číslem $\log 2$. Patrně již nikoho nepřekvapí, že budeme dokazovat sporem a tedy budeme předpokládat, že $\log 2$ lze zapsat jako zlomek

$$\log 2 = \frac{p}{q}.$$

Vlastnosti logaritmické funkce jsme v hodinách dostatečně podrobně probírali, takže víme, že rovnici lze upravit na tvar

$$2 = 10^{\frac{p}{q}}$$

a po umocnění na q dostaneme

$$2^q = 10^p.$$

Připomeňme, že p a q jsou přirozená čísla ($\log 2$ je kladný). Obě strany rovnice jsou tedy nějaká přirozená čísla, přičemž je zřejmé, že číslo na levé straně rozhodně není dělitelné 5, zatímco číslo napravo dělitelné 5 určitě je. Nemohou se rovnat, čímž jsme dosáhli sporu. Z něj vyplývá, že $\log 2$ je iracionální číslo.

Nyní podrobíme zkoumání logaritmy přirozených čísel o základu 2. Opět vyjdeme z předpokladu, že můžeme psát

$$\log_2 x = \frac{p}{q}.$$

Po stejných úpravách jako výše dostáváme

$$x = 2^{\frac{p}{q}} \quad \text{a} \quad x^q = 2^p.$$

Opět uvážíme, že na obou stranách poslední rovnice stojí nějaká přirozená čísla. O nich víme, že dle *základní věty aritmetiky* je lze jednoznačně rozložit na součin prvočinitelů. Protože na pravé straně se nevyskytují jiní činitelé než 2, musí i x na levé straně být složeno pouze z násobků 2. Pokud ho zapíšeme jako $x = 2^n$ pro nějaké přirozené n, dostaneme z porovnání exponentů $nq = p$ a tedy

$$n = \frac{p}{q}.$$

To znamená, že rovnici $\log_2 x = \frac{p}{q}$ lze splnit jedině tehdy, pokud $x = 2^n$ pro nějaké přirozené n. V tomto případě je $\log_2 x = n$ přirozené číslo. Pro $x \neq 2^n$ jsme dosáhli sporu s výchozím předpokladem a $\log_2 x$ je číslo iracionální[1].

Důkaz, který jsme provedli pro logaritmy o základu 2, lze naprosto shodně zopakovat pro libovolný prvočíselný základ (3, 5, 7, 11, ...). Je-li základ číslo složené, je třeba důkaz jen velmi mírně modifikovat[2].

[1] tímto je vysvětlen význam výše použitého „většinou“: vždy, kdy argument logaritmu není nějakou mocninou jeho základu

[2] Základ logaritmů rozložíme na prvočinitele (víme, že takový rozklad je jednoznačný) a požadujeme, aby výraz x^q byl složen ze všech prvočinitelů ve správné násobnosti.