B Řešení úloh

1 Zlatý řez

Předpokládejme, že hodnotu zlatého řezu můžeme vyjádřit jako racionální číslo

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{p}{q},$$

kde p a q jsou přirozená čísla (φ je nepochybně kladné). Vztah snadno upravíme

$$\sqrt{5} = \frac{2p-q}{q},$$

přičemž pravá strana je racionální číslo, což je v rozporu s iracionalitou $\sqrt{5}$ na levé straně.

2 Logaritmy

$$\log_3 \frac{2}{9} = \log_3 2 - \log_3 9 = \log_3 2 - 2$$

Rozdíl iracionálního a celého čísla na pravé straně je iracionální, totéž musí být pravda pro stranu levou. Velmi podobná (součin racionálního a iracionálního čísla) je situace ve druhém případě

$$\log_7 \sqrt[5]{18} = \frac{1}{5} \log_7 18.$$

3 Iracionalita π^2

Díl 6 seriálu přináší důkaz iracionality π. Nyní pozměníme výchozí předpoklad pro důkaz sporem na tvar

$$\pi^2 = \frac{p}{q}.$$

Po dosazení se obecný tvar rekurentní formule pro a_n zapíše jako

$$a_n = (4n-2)qa_{n-1} - pqa_{n-2}.$$

Naštěstí to nic nemění na skutečnosti, že pomocí matematické indukce lze z celočíselnosti předchozích členů odvodit i celočíselnost a_n. Na zbytku důkazu již není třeba nic upravovat a tím je iracionalita π^2 prokázána. Tvrzení pro π je pak již snadným důsledkem, neboť jde o odmocninu iracionálního čísla.

4 Vlastní číslo

Možností a různých postupů je opravdu nespočet. Jak bylo zmíněno i v textu, je možné experimentovat s čísly tvaru

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{f(i)}},$$

kde $f(n)$ je nějaká „vhodná“ rostoucí funkce (jejím definičním oborem jsou přirozená čísla, funkční hodnoty jsou rovněž přirozené). Samozřejmě lze využít i jiný základ b než 10 a v čitateli se mohou vyskytovat čísla[1] 1 až $b-1$. Postačující podmínkou na funkci $f(n)$ může být například

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \infty,$$

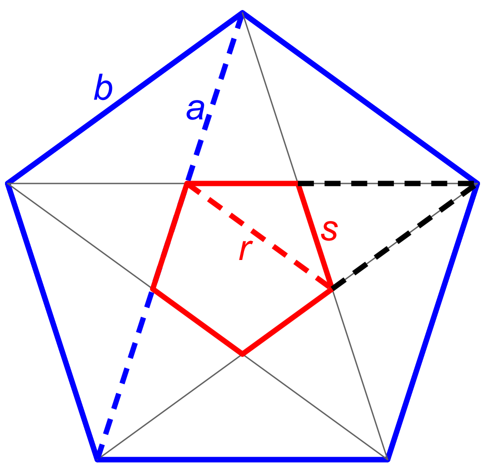
tedy že roste rychleji než libovolná lineární funkce. Tím je zajištěno, že počet nul mezi sousedními ciframi desetinného zápisu „v průměru“ narůstá a následně rozvoj nemůže být periodický. Pro funkce $f(n) = n!$ (Liouvillova čísla), 2^n, n^2 (také uvedené v textu) je tato podmínka splněna, existuje samozřejmě ohromné množství dalších.

Jinou metodou je kombinování číslic desetinných zápisů dvou iracionálních čísel. Např. při použití $\pi = 3,14159...$ a $e = 2,71828...$ sestavíme číslo $0,1741185298...$ (na lichých místech cifry z π, na sudých cifry z e). Ve výsledném čísle rozhodně nemůže vzniknout periodický rozvoj. Pokud by vznikl, řekněme s periodou p od nějakého n_0, pak by byl periodický také s periodou $2p$ a pro cifry rozvoje by platilo $a_{n+2p} = a_n \;\forall n \geq n_0$. To by však znamenalo opakování s periodou p v prvním (pro n lichá) i v druhém (pro n sudá) vstupním čísle, což je spor. Takto vytvořené číslo je tedy skutečně iracionální.

Vždy je ale třeba zachovat obezřetnost. Řekněme, že bychom chtěli vyjít z Liouvillovy konstanty (číslo N_1 v 7. díle textu) a následně bychom každou 53. číslici přepsali šestkou. Ukazuje se, že takové číslo již iracionální není! Pro $n \geq 53$ je totiž $n!$ vždy dělitelné 53, takže všechny jedničky v nekonečné části desetinného rozvoje budou přepsány šestkami. Rozvoj se stává periodickým a číslo je racionální. Přitom by stačilo odsunout periodicky se opakující šestky o jedno místo doprava, kde pro dostatečně velká n již přepsání jedniček nehrozí.

5 Geometrický důkaz

Pomocí úhlopříček vymezíme v pravidelném pětiúhelníku menší pětiúhelník, viz obr. 1. Uvědo-



Obrázek 1: Nesouměřitelnost úhlopříčky a strany pětiúhelníka.

míme si, že černě čárkované úsečky mají délku r, stejnou jako úhlopříčka menšího pětiúhelníka. Délku úhlopříčky a strany výchozího pětiúhelníka vyjádříme jako $a = s + 2r$ a $b = s + r$. Nalezneme podobné trojúhelníky, ze kterých odvodíme, že

$$\frac{a}{b} = \frac{r+s}{r} = \frac{b}{a-b}.$$

[1]mohou to být také nuly, ale pro zachování iracionality musí členů s nenulovým čitatelem být nekonečně mnoho

Skutečně tedy poměr a/b odpovídá hodnotě zlatého řezu.

Nyní budeme dokazovat iracionalitu $\varphi = a/b$ sporem. Předpokládejme, že a a b jsou souměřitelné. Obě úsečky jsou tedy nějakým celočíselným násobkem společné míry m, tj. $a = pm$ a $b = qm$ pro přirozená p a q. Pak je poměr $a/b = p/q$ racionální. Platí však, že $r = a - b = (p-q)m$ a $s = 2b - a = (2q-p)m$. Rozdíly úseček s mírou m mají tutéž míru (jsou také nějakým celým násobkem m), takže také r a s jsou souměřitelné délky. V menším (na obrázku červeném) pětiúhelníku můžeme pomocí úhlopříček postupně konstruovat další menší pětiúhelníky, přičemž dle stejné úvahy budou jejich úhlopříčky a strany mít stejnou míru m. Při postupném zmenšování se však úhlopříčky i strany pětiúhelníka v některém kroku nutně stanou menší než míra m. Nemohou tudíž být celým násobkem m. Tím jsme docílili sporu, takže původní úsečky délek a a b nemohou být souměřitelné. Jejich poměr φ je tedy iracionální číslo.

6 Iracionalita e^2

Do předpokladu pro důkaz sporem ve tvaru

$$qe = p\frac{1}{e} = pe^{-1}$$

dosadíme za e i e^{-1} rozvoj exponenciální funkce v $x = 1$, respektive $x = -1$ a dostaneme

$$q\left\{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right\} = p\left\{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots\right\}.$$

Nyní seskupíme členy se stejným jmenovatelem

$$(p-q) - \frac{p+q}{1!} + \frac{p-q}{2!} - \frac{p+q}{3!} + \frac{p-q}{4!} - \cdots = 0.$$

Hodnota $p - q$ je přirozené číslo, protože $e^2 > 1$. Vynásobíme rovnici $m!$, kde m je nějaké sudé přirozené číslo splňující $m > p + q$, a dostaneme

$$m!\left\{(p-q) - \frac{p+q}{1!} + \frac{p-q}{2!} - \cdots + \frac{p-q}{m!}\right\} = R_m,$$

výraz označený R_m zahrnuje zbylé členy

$$R_m = \frac{p+q}{(m+1)} - \frac{p-q}{(m+1)(m+2)} + \frac{p+q}{(m+1)(m+2)(m+3)} - \cdots.$$

Levá strana rovnice (součin faktoriálu a složené závorky) je nepochybně celočíselná. Rozdíl prvních dvou členů v R_m můžeme upravit

$$\frac{p+q}{(m+1)} - \frac{p-q}{(m+1)(m+2)} = \frac{1}{(m+1)}\left\{(p+q) - \frac{p-q}{m+2}\right\}$$

a analogicky i pro další dvojice. Díky podmínce pro m jsou všechny rozdíly kladné a tudíž i celý výraz R_m je kladný. Pro získání horního odhadu R_m záporné členy zanedbáme a ostatní zhora omezíme geometrickou řadou

$$R_m < \frac{p+q}{(m+1)} + \frac{p+q}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \cdots < \frac{p+q}{(m+1)} + \frac{p+q}{(m+1)^3} + \cdots,$$

kterou sečteme s výsledkem

$$R_m < (p+q)\frac{m+1}{m(m+2)} < \frac{p+q}{m}.$$

Díky podmínce $m > p + q$ jsme tak ověřili nerovnosti $0 < R_m < 1$. Takový člen se nemůže rovnat celočíselnému výrazu, takže jsme získali spor s počátečním předpokladem. Iracionalita e^2 je tím dokázána.